

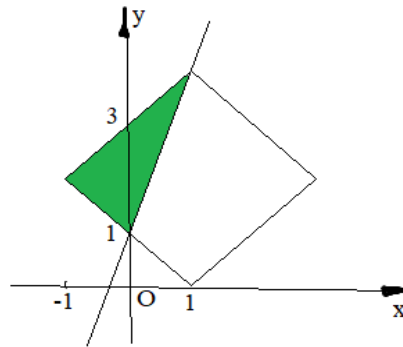


Задания, ответы и критерии оценивания

1. (17 баллов) Найдите площадь треугольника, отсекаемого прямой  $y = 3x + 1$  от фигуры, заданной неравенством  $|x - 1| + |y - 2| \leq 2$ .

**Ответ:** 2.

**Решение.** Фигура, заданная данным неравенством, является квадратом.



Сторона квадрата равна  $2\sqrt{2}$  (это можно найти по теореме Пифагора). Данная прямая проходит через вершину квадрата и отсекает треугольник с меньшим катетом равным  $\sqrt{2}$ , а больший катет – сторона квадрата. Тогда площадь отсекаемого прямоугольного треугольника равна  $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2$  кв.ед.

2. (16 баллов) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\cos x.$$

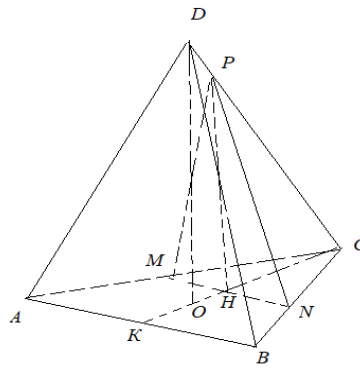
**Ответ:** 2,5.

**Решение.** Используя основное тригонометрическое тождество, получаем  $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x + 3$ . Сделаем замену  $\cos x = t, t \in [-1; 1]$ . После этого задача сводится к нахождению наименьшего значения квадратичной функции  $g(x) = 2t^2 + 2t + 3$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Квадратичная функция задаёт на плоскости параболу (ветви которой направлены вверх), наименьшее значение достигается в вершине параболы, если абсцисса вершины принадлежит отрезку  $[-1; 1]$ . Абсцисса вершины параболы  $t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$ , следовательно,  $g_{\text{наим}} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = 2,5$ .

3. (17 баллов) Сечение правильной треугольной пирамиды проходит через среднюю линию основания и перпендикулярно основанию. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 8.

**Ответ:** 9.

**Решение.** Сечение  $MNP$  проходит через среднюю линию основания пирамиды  $MN$  и перпендикулярно основанию. Следовательно, высота  $PH$  треугольника  $MNP$  параллельна высоте пирамиды  $DO$ .



Имеем  $OC:OK=2:1$ ,  $CH=HK$ , следовательно,  $CH:CO=3:4$ . Используя подобие треугольников  $DOC$  и  $PNC$ , получаем, что  $PH = \frac{3}{4}DO = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ . Тогда площадь сечения равна  $S = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$  кв.ед.

**4. (15 баллов)** Одинаковые газы находятся в двух теплоизолированных сосудах с объёмами  $V_1=1$  л и  $V_2=2$  л. Давления газов  $p_1=2$  атм и  $p_2=3$  атм, а их температуры  $T_1=300$  К и  $T_2=400$  К соответственно. Газы смешали. Определите температуру, которая установится при этом в сосудах.

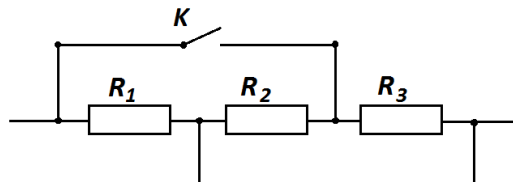
**Ответ:**  $\approx 369$  К.

**Решение.** Суммарная внутренняя энергия газов до смешивания равна суммарной внутренней энергии после смешивания  $U_1 + U_2 = U$ , тогда

$$\frac{i}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{i}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{i}{2} (\nu_1 + \nu_2) RT, \text{ где } \nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1}, \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}. \text{ В итоге получаем}$$

$$T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} \approx 369 \text{ К.}$$

**5. (20 баллов)** Известно, что номиналы резисторов на представленной схеме  $R_1=4$  Ом,  $R_2=8$  Ом и  $R_3=16$  Ом. Определите, как и на сколько, изменится общее сопротивление цепи при замыкании ключа  $K$ .



**Ответ:** уменьшится на 1,7 Ом.

**Решение.** До замыкания ключа сопротивление схемы  $R_0 = R_1 = 4$  Ом. После замыкания получаем параллельное соединение:

$$R_k = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 16}{4 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 8 \cdot 16} \approx 2,3 \text{ Ом.}$$

В результате  $\Delta R = R_k - R_0 = -1,7$  Ом.

**6. (15 баллов)** Конденсатор ёмкостью  $C_1=10$  мкФ заряжен до напряжения  $U_1=15$  В. Второй конденсатор ёмкостью  $C_2=5$  мкФ заряжен до напряжения  $U_2=10$  В. Конденсаторы соединили разноимённо заряженными обкладками. Определите напряжение, которое установится на обкладках.

**Ответ:** 6,67 В.

**Решение.** Закон сохранения заряда  $C_1 U_1 - C_2 U_2 = C_1 U + C_2 U$ . Получаем:

$$U = \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \cdot 15 - 5 \cdot 10}{10 + 5} = 6,67 \text{ В.}$$

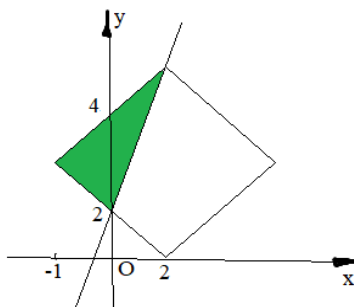


Задания, ответы и критерии оценивания

1. (17 баллов) Найдите площадь треугольника, отсекаемого прямой  $y = 2x + 2$  от фигуры, заданной неравенством  $|x - 2| + |y - 3| \leq 3$ .

Ответ: 3.

Решение. Фигура, заданная данным неравенством, является квадратом.



Сторона квадрата равна  $3\sqrt{2}$  (это значение можно найти по теореме Пифагора). Данная прямая проходит через вершину квадрата и отсекает треугольник с меньшим катетом равным  $\sqrt{2}$ , а больший катет – сторона квадрата. Тогда площадь отсекаемого прямоугольного треугольника равна  $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 3$  кв.ед.

2. (16 баллов) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 7\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\sin x.$$

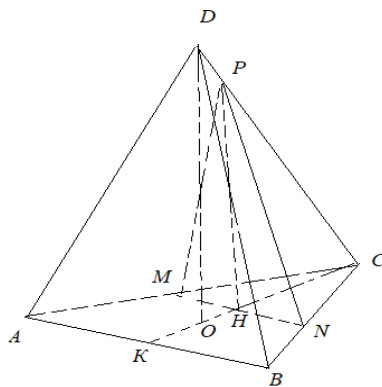
Ответ: 4,5.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем  $f(x) = 2\sin^2 x + 2\cos x + 5$ . Сделаем замену  $\sin x = t$ ,  $t \in [-1; 1]$ . После этого задача сводится к нахождению наименьшего значения квадратичной функции  $g(x) = 2t^2 + 2t + 5$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Квадратичная функция задаёт на плоскости параболу (ветви которой направлены вверх), наименьшее значение достигается в вершине параболы, если абсцисса вершины принадлежит отрезку  $[-1; 1]$ . Абсцисса вершины параболы  $t_0 = -\frac{1}{2} \in [-1; 1]$ , следовательно,  $g_{\text{наим}} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 + 5 = 4,5$ .

3. (17 баллов) Сечение правильной треугольной пирамиды проходит через среднюю линию основания и перпендикулярно основанию. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна 8, а высота пирамиды равна 12.

Ответ: 18.

Решение. Сечение  $MNP$  проходит через среднюю линию основания пирамиды  $MN$  и перпендикулярно основанию. Следовательно, высота  $PH$  треугольника  $MNP$  параллельна высоте пирамиды  $DO$ .



Имеем  $OC:OK=2:1$ ,  $CH=HK$ , следовательно,  $CH:CO=3:4$ . Используя подобие треугольников  $DOC$  и  $PNC$ , получаем, что  $PN = \frac{3}{4}DO = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ . Тогда площадь сечения равна  $S = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$  кв.ед.

**4. (15 баллов)** Одинаковые газы находятся в двух теплоизолированных сосудах с объёмами  $V_1=2$  л и  $V_2=3$  л. Давления газов  $p_1=3$  атм и  $p_2=4$  атм, а их температуры  $T_1=400$  К и  $T_2=500$  К соответственно. Газы смешали. Определите температуру, которая установится при этом в сосудах.

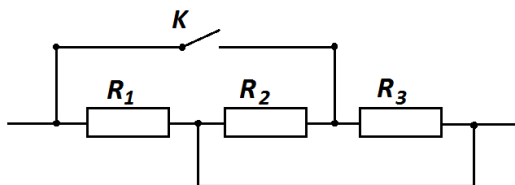
**Ответ:**  $\approx 462$  К.

**Решение.** Суммарная внутренняя энергия газов до смешивания равна суммарной внутренней энергии после смешивания  $U_1 + U_2 = U$ .

$$\frac{i}{2} \nu_1 RT_1 + \frac{i}{2} \nu_2 RT_2 = \frac{i}{2} (\nu_1 + \nu_2) RT, \text{ где } \nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1}, \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}.$$

Тогда  $T = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} \approx 462$  К.

**5. (20 баллов)** Известно, что номиналы резисторов на представленной схеме  $R_1=1$  Ом,  $R_2=2$  Ом и  $R_3=4$  Ом. Определите, как и на сколько, изменится общее сопротивление цепи при замыкании ключа  $K$ .



**Ответ:** уменьшится на 0,43 Ом.

**Решение.** До замыкания ключа сопротивление схемы  $R_0 = R_1 = 1$  Ом. После замыкания получаем параллельное соединение:

$$R_K = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4} \approx 0,57 \text{ Ом.}$$

В результате  $\Delta R = R_K - R_0 = -0,43$  Ом.

**6. (15 баллов)** Конденсатор ёмкостью  $C_1=20$  мкФ заряжен до напряжения  $U_1=20$  В. Второй конденсатор ёмкостью  $C_2=5$  мкФ заряжен до напряжения  $U_2=5$  В. Конденсаторы соединили разноимённо заряженными обкладками. Определите напряжение, которое установится на обкладках.

**Ответ:** 15 В.

**Решение.** Закон сохранения заряда:  $C_1 U_1 - C_2 U_2 = C_1 U + C_2 U$ . Получаем:

$$U = \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{20 \cdot 20 - 5 \cdot 5}{20 + 5} = 15 \text{ В.}$$