11 класс **Заключительный тур** **2022-2023**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение $(x^4-2)(2^{\text{tg}x}-1)+\left(3^{x^4}-9\right)\text{tg}x=0$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{2};\ \pi n,\ \ n\in Z$.

Решение. Функции $y=2^t$ и $y=3^t$ – возрастающие, следовательно, выражение $3^{x^4}-9=3^{x^4}-3^2$ имеет такой же знак, как и x^4-2, а выражение $2^{\text{tg}x}-1=2^{\text{tg}x}-2^0$ имеет такой же знак, как и $\text{tg}x-0=\text{tg}x$. Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Имеем $\left[\begin{array}{l}x^4-2=0,\\ \text{tg}x=0.\end{array}\right.$ Решая эти уравнения, получаем ответ.

Критерии оценивания. За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он ехал на велосипеде и с какой скоростью?

Ответ: 5/7 часа; 35 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1}+\frac{25}{v_2}+\frac{4}{v_3}=\frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1+\frac{1}{49}v_2+\frac{1}{49}v_3=\frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{16}v_1\right)+\left(\frac{25}{v_2}+\frac{1}{49}v_2\right)+\left(\frac{4}{v_3}+\frac{1}{49}v_3\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}. \qquad (2)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1; \quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2; \quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – еще 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x) = 3\sin x,\ f_{n+1}(x) = \frac{9}{3-f_n(x)}$$

для любого целого $n \geq 0$. Найдите $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ: $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$.

Решение. Легко вычислить: $f_3(x) = f_0(x)$, поэтому $f_{2023}(x) = f_1(x) = \frac{9}{3-3\sin x}$. Следовательно, $f_{2023}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2};\ f_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6;\ f_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3;\ f_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2};\ \ldots$$

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение $f_3(x) = f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x) = f_1(x)$ – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1балл.

4. (13 *баллов*) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны $\sqrt{61}$, $\sqrt{52}$ и $\sqrt{41}$. Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{60}{37}$.

Решение. Обозначим основание пирамиды – *ABC*, вершину пирамиды – *D*, центр сферы – *O*, радиус сферы – *r*. Пусть $AB=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{61}$, $AC=\sqrt{52}$. Обозначим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$.

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$V_{ABCD}=V_{ABDO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}= \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot r=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xz\right). \qquad (2)$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}xyz. \qquad (3)$$

Поэтому

$$r=\frac{xyz}{xy+yz+xz}. \qquad (4)$$

Числа x, y, z находятся из системы уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x^2+z^2=52, \\ y^2+z^2=61. \end{cases}$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим:

$$x^2+y^2+z^2=77,$$

откуда $x^2=16,\ y^2=25,\ z^2=36$. Используя формулу (4), находим $r=\frac{4\cdot5\cdot6}{4\cdot5+4\cdot6+5\cdot6}=\frac{60}{37}$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4 балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 *баллов*) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью v_0. Первый камень брошен горизонтально с высоты H=40 м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: ≈56,6 м.

Решение. Уравнения движения первого камня: $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$x_1 = v_0 t = L,$ **(2 балла)**

где L – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела: $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

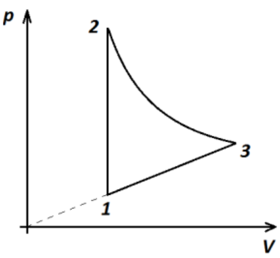
Так как камни встретились, то $y_1 = y_2,$ **(1 балл)**

В результате: $H = v_0 t = L$. **(1 балл)**

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$S = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \cdot 40 \approx 56{,}6$ м. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изохоры, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



Ответ: 8,8 %.

Решение. Так как в процессе 3-1 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что объём меняется в $\sqrt{2}$ раз. **(1 балл)**

Модуль работы газа в процессе 3-1 равен площади под графиком:

$A_{3-1} = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1V_3 - p_1V_1 + p_3V_3 - p_3V_1).$ **(2 балла)**

Так как: $p_1V_3 = p_3V_1$, **(1 балл)**

получаем: $A_{3-1} = \frac{1}{2}(-p_1V_1 + p_3V_3) = \frac{1}{2}\upsilon R(T_3 - T_1).$ **(2 балла)**

Количество теплоты в процессах: $Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\vartheta RT_1.$ **(2 балла)**

$Q_{23} = A_{23} = \vartheta RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = 2\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}.$ **(2 балла)**

$Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_1 - T_3) = 2\vartheta R(T_1 - T_3) = -2\vartheta RT_1.$ **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = \frac{Q_{12}+Q_{23}-|Q_{31}|}{Q_{12}+Q_{23}} = \frac{\frac{3}{2}\vartheta RT_1+2\vartheta RT_1\ln\sqrt{2}-2\vartheta RT_1}{\frac{3}{2}\vartheta RT_1+2\vartheta RT_1\ln\sqrt{2}} = \frac{1{,}5+2\ln\sqrt{2}-2}{1{,}5+2\ln\sqrt{2}}.$ **(2 балла)**

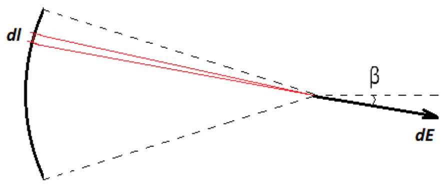
В результате: $\eta = 0{,}088 = 8{,}8$ %. **(1 балл)**

7. (10 *баллов*) Дуга, центральный угол которой α=30^{O}, вырезана из окружности радиусом R=50 см. По дуге равномерно распределён заряд q=2 мкКл. Определите напряжённость E электрического поля в центре кривизны этой дуги.

Ответ: 71 кВ/м.

Решение. Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной dl, на котором располагается заряд dq. Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$dE = k\frac{dq}{R^2}.$ **(2 балла)**



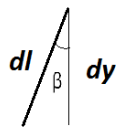
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$dE\cos\beta = k\frac{dq}{R^2}\cos\beta.$ **(2 балла)**

Заряд этого элемента $dq = \frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl$. **(2 балла)**

Получаем $dE \cos\beta = k \frac{\frac{q}{R \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot dl}{R^2} \cos\beta = k \frac{6q \cdot dl \cdot \cos\beta}{\pi R^3}$. **(1 балл)**

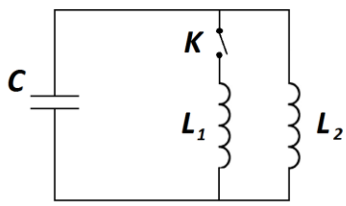
Обратим внимание, что $dl \cdot \cos\beta = dy$. **(1 балл)**



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$E = k \frac{6q \cdot 2R \sin 15°}{\pi R^3} = 12k \frac{q \sin 15°}{\pi R^2} = 12 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6} \sin 15°}{\pi \cdot 0{,}5^2} = 71\,180\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью C=2 мкФ и катушки индуктивностью L_2=1 мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой $I_{\max}$=5 мА. В тот момент времени, когда ток через катушку L_2 максимален, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки L_1=2 мГн.



Ответ: 90 мВ.

Решение. После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек: $L_1 I_1^| + L_2 I_2^| = 0$. **(1 балл)**

Получаем, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = const$. **(2 балла)**

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые. **(2 балла)**

Получаем $L_2 I_{max} = (L_1 + L_2) I$. **(3 балла)**

Получили, что $I = \frac{L_2 I_{max}}{L_1 + L_2} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-3}$ А. **(2 балла)**

Закон сохранения энергии: $\frac{L_2 I_{max}^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_{max}^2}{2}$. **(2 балла)**

Получаем:

$$U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1+L_2)I^2}{C}} = \sqrt{\frac{1\cdot 10^{-3}(5\cdot 10^{-3})^2}{2\cdot 10^{-6}} - \frac{(2\cdot 10^{-3}+1\cdot 10^{-3})\left(\frac{5}{3}\cdot 10^{-3}\right)^2}{2\cdot 10^{-6}}} = 0{,}09 \text{ В} =$$

90 мВ. **(3 балла)**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (12 *баллов*) Решите уравнение $(x^3-3)(2^{\operatorname{ctg}x}-1)+\left(5^{x^3}-125\right)\operatorname{ctg}x=0$.

Ответ: $\sqrt[3]{3}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z$.

Решение. Функции $y=2^t$ и $y=5^t$ – возрастающие, следовательно, выражение $5^{x^3}-125=5^{x^3}-5^3$ имеет такой же знак, как и x^3-3, а выражение $2^{\operatorname{ctg}x}-1=2^{\operatorname{ctg}x}-2^0$ имеет такой же знак, как и $\operatorname{ctg}x-0=\operatorname{ctg}x$. Таким образом, слагаемые в левой части уравнения – одного знака, равенство нулю возможно лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю. Получаем $\left[\begin{array}{l}x^3-3=0,\\ \operatorname{ctg}x=0.\end{array}\right.$ Решая эти уравнения, получаем ответ.

Критерии оценивания. За полностью обоснованное верное решение – 12 баллов. Если участник без обоснования приравнял к нулю каждое слагаемое и получил верный ответ, ставить 4 балла.

2. (13 *баллов*) Участник соревнований по триатлону на первом этапе плыл 1 км. На втором ехал на велосипеде 25 км, на третьем бежал 4 км. Всю дистанцию он преодолел за 1 час 15 мин. Перед соревнованиями он опробовал трассу: плыл $1/16$ часа, ехал на велосипеде и бежал по $1/49$ часа, пройдя в сумме $5/4$ км. На соревнованиях каждый этап он проходил с той же скоростью, что и на тренировке. Сколько времени он бежал и с какой скоростью?

Ответ: $2/7$ часа; 14 км/час.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости спортсмена на этапах 1, 2, 3 соответственно. Из условия следует: $\frac{1}{v_1}+\frac{25}{v_2}+\frac{4}{v_3}=\frac{5}{4}$ часа; $\frac{1}{16}v_1+\frac{1}{49}v_2+\frac{1}{49}v_3=\frac{5}{4}$ км. Складывая эти уравнения и учитывая, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (1), получим:

$$\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{16}v_1\right)+\left(\frac{25}{v_2}+\frac{1}{49}v_2\right)+\left(\frac{4}{v_3}+\frac{1}{49}v_3\right)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{16}}+2\sqrt{25\cdot\frac{1}{49}}+2\sqrt{4\cdot\frac{1}{49}}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{2}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда слагаемые в левой части неравенства (1) равны. Следовательно,

$$\frac{1}{v_1}=\frac{1}{16}v_1;\quad \frac{25}{v_2}=\frac{1}{49}v_2;\quad \frac{4}{v_3}=\frac{1}{49}v_3$$

то есть $v_1 = 4\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_2 = 35\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $v_3 = 14\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Критерии оценивания. Получен верный ответ при полном обосновании – 13 баллов. Имеются арифметические ошибки при правильном ходе решения – минус 1–2 балла. Получена верная система уравнений – 2 балла (по 1 баллу за каждое). Использовано неравенство (1) или равносильное и получено следствие (2) – еще 6 баллов (всего 8). Сделан вывод, что во всех трёх случаях в (1) имеет место равенство – ещё 4 балла (всего 12 баллов).

3. (12 *баллов*) Последовательность функций задана формулами

$$f_0(x) = 2\cos x,\ f_{n+1}(x) = \frac{4}{2-f_n(x)}$$

для любого целого $n \geq 0$. Найдите $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$.

Решение. Легко вычислить: $f_3(x) = f_0(x)$, поэтому $f_{2023}(x) = f_1(x) = \frac{4}{2-2\cos x}$. Следовательно, $f_{2023}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$.

Замечание. Можно сразу вычислять значения функций в данной точке. Получится циклическая последовательность

$$f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1;\ f_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4;\ f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2;\ f_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1; \dots$$

Критерии оценивания. Полное решение – 12 баллов. Найдено соотношение $f_3(x) = f_0(x)$ – 7 баллов, найдено равенство $f_{2023}(x) = f_1(x)$ – ещё 4 балла. Ошибки в счёте – минус 1балл.

4. (13 *баллов*) Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а стороны основания равны $\sqrt{85}$, $\sqrt{58}$ и $\sqrt{45}$. Центр сферы, которая касается всех боковых граней, лежит на основании пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{14}{9}$.

Решение. Обозначим основание пирамиды – *ABC*, вершину пирамиды – *D*, центр сферы – *O*, радиус сферы – *r*. Пусть $AB=\sqrt{45}$, $BC=\sqrt{85}$, $AC=\sqrt{58}$. Обозначим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$.

Так как радиус, проведённый в точку касания сферы и плоскости, ортогонален плоскости, имеем:

$$V_{ABCD}=V_{ABDO}+V_{BCDO}+V_{ACDO}= \qquad (1)$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot r+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot r=$$

$$=\frac{1}{3}r\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xz\right). \qquad (2)$$

С другой стороны, так как боковые рёбра попарно перпендикулярны, то

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}xyz. \qquad (3)$$

Поэтому

$$r=\frac{xyz}{xy+yz+xz}. \qquad (4)$$

Числа $x,\ y,\ z$ находятся из системы уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2=45, \\ x^2+z^2=58, \\ y^2+z^2=85. \end{cases}$

Складывая уравнения системы и деля на два, получим: $x^2+y^2+z^2=94$, откуда $x^2=9,\ y^2=36,\ z^2=49$. Используя формулу (4), находим $r=\dfrac{3\cdot 6\cdot 7}{3\cdot 6+3\cdot 7+6\cdot 7}=\dfrac{14}{9}$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Арифметические ошибки, не влияющие на смысл решения: минус 1 балл за каждую. Записано равенство (1) 2 балла. Получено для объёма пирамиды выражение (2) – еще 4 балла (всего в сумме 6 баллов). Записано равенство (3) 2 балла. Записана и решена система уравнений: 4 балла (только записана – 2 балла).

5. (10 *баллов*) Два камня одновременно брошены с одинаковой начальной скоростью v_0. Первый камень брошен горизонтально с высоты H=50 м, второй – с поверхности Земли вертикально вверх. Известно, что камни столкнулись в воздухе. Определите начальное расстояние между камнями. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: ≈70,7 м.

Решение. Уравнения движения первого камня: $y_1 = H - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

$x_1 = v_0 t = L$, **(2 балла)**

где L – начальное расстояние между телами по горизонтали.

Уравнение движения второго тела: $y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **(2 балла)**

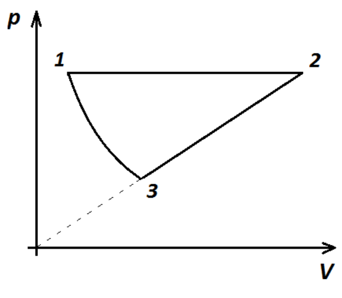
Так как камни встретились, то $y_1 = y_2$, **(1 балл)**

В результате: $H = v_0 t = L$. **(1 балл)**

Получаем, что начальное расстояние между камнями:

$S = \sqrt{2}H = \sqrt{2} \cdot 50 \approx 70{,}7$ м. **(2 балла)**

6. (15 *баллов*) В основе работы тепловой машины лежит цикл, состоящий из изобары, изотермы и процесса с прямо пропорциональной зависимостью давления от объёма (см. рисунок). В качестве рабочего тела используется идеальный одноатомный газ. Известно, что максимальная и минимальная температуры отличаются в два раза. Определите КПД данной тепловой машины.



Ответ: 6,1 %.

Решение. Так как в процессе 2-3 температура меняется в два раза, то из уравнения состояния идеального газа $pV = \vartheta RT$ следует, что давление меняется в $\sqrt{2}$ раз. **(1 балл)**

Модуль работы газа в процессе 2-3 равен площади под графиком:

$A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_2 - V_3) = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_2V_3 + p_3V_2 - p_3V_3)$. **(2 балла)**

Так как $p_2V_3 = p_3V_2$, **(1 балл)**

Получаем $A_{2-3} = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{1}{2}\upsilon R(T_2 - T_3)$. **(2 балла)**

Количество теплоты в процессах:

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \vartheta R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\vartheta RT_1$. **(2 балла)**

$Q_{31} = A_{31} = \vartheta RT_1 \ln\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\vartheta RT_1 \ln\sqrt{2}$. **(2 балла)**

$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2}\vartheta R(T_3 - T_2) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_3 - T_2) = 2\vartheta R(T_3 - T_2) = -2\vartheta RT_1$.
(2 балла)

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_{12} - |Q_{31} + Q_{23}|}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2}\vartheta RT_1 - \vartheta RT_1 \ln\sqrt{2} - 2\vartheta RT_1}{\frac{5}{2}\vartheta RT_1} = \frac{2{,}5 - \ln\sqrt{2} - 2}{2{,}5}$. **(2 балла)**

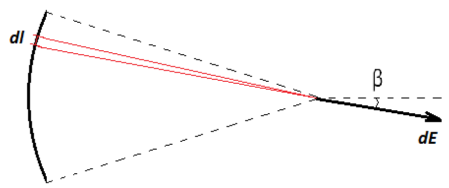
В результате: $\eta = 0{,}061 = 6{,}1\ \%$. **(1 балл)**

7. (10 *баллов*) Дуга, центральный угол которой α=60$^{\text{O}}$, вырезана из окружности радиусом *R*=40 см. По дуге равномерно распределён заряд *q*=5 мкКл. Определите напряжённость *E* электрического поля в центре кривизны этой дуги.

Ответ: 269 кВ/м.

Решение. Рассмотрим небольшой элемент дуги длиной dl, на котором располагается заряд dq. Он создаёт в искомой точке напряжённость:

$dE = k\frac{dq}{R^2}$. **(2 балла)**



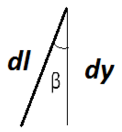
Данная напряжённость в проекции на горизонтальное направление:

$dE\cos\beta = k\frac{dq}{R^2}\cos\beta$. **(2 балла)**

Заряд этого элемента: $dq = \frac{q}{R\cdot\frac{\pi}{3}} \cdot dl$. **(2 балла)**

Получаем: $dE\cos\beta = k\frac{\frac{q}{R\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot dl}{R^2}\cos\beta = k\frac{3q\cdot dl\cdot\cos\beta}{\pi R^3}$. **(1 балл)**

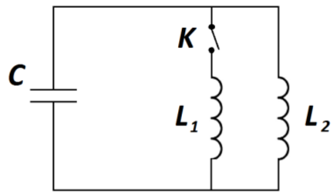
Обратим внимание, что: $dl\cdot\cos\beta = dy$. **(1 балл)**



Суммируя по всем таким элементам, получаем:

$E = k\frac{3q\cdot 2R\sin 30°}{\pi R^3} = 6k\frac{q\sin 30°}{\pi R^2} = 6\cdot 9\cdot 10^9\frac{5\cdot 10^{-6}\sin 30°}{\pi\cdot 0{,}4^2} = 268\,574\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$. **(2 балла)**

8. (15 *баллов*) В идеальном контуре, состоящем из конденсатора ёмкостью C=1 мкФ и катушки индуктивностью L_2=2 мГн, происходят незатухающие свободные гармонические колебания тока с амплитудой I_{max}=10 мА. В тот момент времени, когда ток через катушку L_2 максимален, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после этого. Индуктивность катушки L_1=4 мГн.



Ответ: 516 мВ.

Решение. После замыкания ключа, правило Кирхгофа для контура, состоящего из катушек: $L_1 I_1' + L_2 I_2' = 0$. **(1 балл)**

Получаем, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = const$. **(2 балла)**

Когда напряжение на конденсаторе будет максимально, то ток на участке цепи с конденсатором равен нулю. Следовательно, токи через катушки одинаковые. **(2 балла)**

Получаем: $L_2 I_{max} = (L_1 + L_2)I$. **(3 балла)**

Получили, что $I = \frac{L_2 I_{max}}{L_1 + L_2} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-3}} = \frac{10}{3}\cdot 10^{-3}$ А. **(2 балла)**

Закон сохранения энергии $\frac{L_2 I_{max}^2}{2} = \frac{(L_1+L_2)I^2}{2} + \frac{CU_{max}^2}{2}$. **(2 балла)**

Получаем: $U_{max} = \sqrt{\frac{L_2 I_{max}^2}{C} - \frac{(L_1+L_2)I^2}{C}} = \sqrt{\frac{2\cdot10^{-3}(10\cdot10^{-3})^2}{1\cdot10^{-6}} - \frac{(4\cdot10^{-3}+2\cdot10^{-3})\left(\frac{10}{3}\cdot10^{-3}\right)^2}{1\cdot10^{-6}}} = 0{,}516\ \text{В} = 516\ \text{мВ}.$

(3 балла)